M1 Ingénierie Mathématique
2023/2024

EDP & Différences Finies

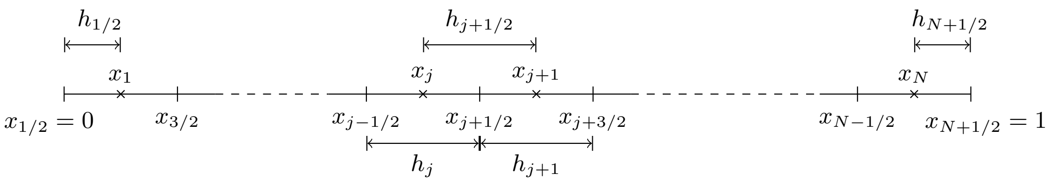
TD 2 : Un petit détour par les volumes finis

Rappels

Exercise 1 Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad \forall x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ est une fonction donnée et u est l'inconnue du problème. Nous admettons que ce problème a une unique solution $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$. Nous allons définir une approximation de la solution u à l'aide de la méthode des volumes finis. Nous introduisons une partition de l'intervalle $(0,1)$ en N sous-intervalles notés $K_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}),\ j = 1,..,N$, avec $x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < ... < x_{N-1/2} < x_{N+1/2} = 1$. Nous notons $h_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2},\ j = 1,..,N$ la longueur de l'intervalle K_j. De plus, nous définissons dans chaque intervalle K_j un point auxiliaire $x_j \in K_j$ et nous notons $h_{1/2} = x_1 - x_{1/2}$, $h_{N+1/2} = x_{N+1/2} - x_N$ et $h_{j+1/2} = x_{j+1} - x_j,\ j = 1,..,N-1$ la distance entre les points x_j et x_{j+1}.



Les inconnues discrètes $u_j,\ j = 1,..,N$ seront associées au points x_j.

a) Pour écrire le schéma volumes finis, nous commençons par intégrer l'"équation sur chaque sous-intervalle K_j nous obtenons

$$-\Big[u'\Big(x_{j+1/2}\Big) - u'\Big(x_{j-1/2}\Big)\Big] = h_j f_j, \quad j = 1,..,N. \tag{2}$$

où $f_j = \dfrac{1}{h_j}\displaystyle\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(x)\,dx$ représente la moyenne de la fonction f sur l'intervalle K_j. Ecrire un schéma différences finis pour chacun des problèmes (2) ci-dessus à l'aide des inconnues discrètes $u_j,\ j = 1,..,N$. Par convention nous noterons $u_0 = u_{N+1} = 0$.

b) Montrer que ceci permet de définir les solutions discrètes $(u_j)_{j=1,..,N}$ comme solution d'un système linéaire $Au = b$ où $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice carré symétrique définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont on précisera les expressions. Comparer le système obtenu à celui que l'on obtient par la méthode des différences finies dans le cas particulier où $h_j = h,\ \forall j = 1, .., N$ et $x_j = (x_{j-1/2} + x_{j+1/2})/2,\ \forall j = 1, .., N$.

c) Etudier la consistance du schéma au sens des différences finies.

d) La méthode n'est pas consistante au sens des différences finies mais nous allons néanmoins démontrer qu'elle est convergente. Nous notons $\bar{u}_j = u(x_j),\ j = 1, .., N$ les valeurs de la solution exacte aux points x_j et $\bar{u}_0 = \bar{u}_{N+1} = 0$.

(1) Nous définissons $R_{j+1/2} = \dfrac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j}{h_{j+1/2}} - u'(x_{j+1/2})$ pour $j = 0, .., N$. Montrer que

$$\left|R_{j+1/2}\right| \leqslant h_{j+1/2}\Big(\sup_{[0,1]} |u''|\Big), \quad \forall j = 0, .., N.$$

(2) Posons $e_j = u_j - \bar{u}_j,\ j = 0, .., N+1$. Montrer que

$$-\left[\frac{e_{j+1} - e_j}{h_{j+1/2}} - \frac{e_j - e_{j-1}}{h_{j-1/2}}\right] = R_{j+1/2} - R_{j-1/2}, \quad \forall j = 1, .., N.$$

(3) En déduire que

$$\sum_{j=0}^{N} h_{j+1/2}\Big(\frac{e_{j+1} - e_j}{h_{j+1/2}}\Big)^2 = -\sum_{j=0}^{N} h_{j+1/2} R_{j+1/2}\Big(\frac{e_{j+1} - e_j}{h_{j+1/2}}\Big).$$

puis

$$\sum_{j=0}^{N} h_{j+1/2}\Big(\frac{e_{j+1} - e_j}{h_{j+1/2}}\Big)^2 \leqslant \sum_{j=0}^{N} h_{j+1/2} |R_{j+1/2}|^2.$$

(4) Enfin, pour tout $v = (v_j)_{j=0,..,N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$ avec $v_0 = v_{N+1} = 0$, démontrer le résultat suivant

$$\Big(\sum_{j=1}^{N} h_j |v_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} |v_j| \leqslant \Big(\sum_{j=0}^{N} h_{j+1/2}\left|\frac{v_{i+1} - v_j}{h_{j+1/2}}\right|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Conclure que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N} |u_j - u(x_j)| \leqslant \Big(\sup_{[0,1]} u''\Big)\Big(\max_{0\leqslant i\leqslant N} h_{j+1/2}\Big).$$